МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
[Полное название вуза]

Факультет информационных технологий
Кафедра высшей математики

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

по дисциплине «Высшая математика»

на тему: «Пределы, производные, интегралы и линейные дифференциальные уравнения»

Индивидуальное домашнее задание, вариант 12

Направление подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника

Выполнил(а): студент гр. ____

_____ / И. О. Фамилия

Проверил(а): _____

_____ / И. О. Фамилия

[Город] 2026

Пример работы, выполненной в Универ AI · univerai.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Задача 1. Вычисление пределов.....3
Задача 2. Производные явных и параметрически заданных функций.....4
Задача 3. Исследование функции на экстремум.....5
Задача 4. Неопределённые интегралы.....6
Задача 5. Площадь плоской фигуры.....7
Задача 6. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка.....8
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....9

Задача 1. Вычисление пределов

Условие. Вычислить пределы: а) отношения двух многочленов при x → ∞; б) тригонометрического выражения при x → 0; в) показательно-степенной функции при x → ∞; г) иррационального выражения при x → 2:

$$\text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+1}{5x^2+x-4};\qquad \text{б)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 2x};$$

$$\text{в)}\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x};\qquad \text{г)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}.$$

Решение. а) Подстановка x → ∞ даёт неопределённость ∞/∞. Старшая степень числителя и знаменателя одна и та же, вторая, поэтому делим обе части дроби на x² [1; 2]. Слагаемые 3/x, 1/x², 1/x и 4/x² стремятся к нулю:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-3/x+1/x^2}{5+1/x-4/x^2}=\frac{2}{5}=0{,}4.$$

б) Здесь неопределённость 0/0. Формула понижения степени 1 − cos 4x = 2 sin² 2x позволяет сократить один множитель sin 2x, после чего остаётся первый замечательный предел lim sin u / u = 1 при u = 2x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{x}=2\cdot 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=4.$$

Тот же результат получается через эквивалентные бесконечно малые: 1 − cos 4x ~ (4x)²/2 = 8x², а x·sin 2x ~ 2x², отношение равно 4.

в) Основание стремится к единице, показатель неограниченно растёт, это неопределённость 1^∞. Выделяем второй замечательный предел, домножая и деля показатель на 3/x:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x/3}\right]^6=e^6\approx 403{,}4.$$

г) Корень в знаменателе обращается в 2 при x = 2, снова получаем 0/0. Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое выражение √(x+2) + 2,

тогда в знаменателе останется (x + 2) − 4 = x − 2, и этот множитель сократится с числителем x² − 4 = (x − 2)(x + 2):

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=16.$$

Ответ: а) 0,4; б) 4; в) $e^6\approx 403{,}4$; г) 16.

Задача 2. Производные явных и параметрически заданных функций

Условие. Найти производные функций: а) y = x²·e^(−2x); б) y = arctg √x и её значение при x = 4. в) Для циклоиды x = t − sin t, y = 1 − cos t найти dy/dx и составить уравнение касательной в точке, где t = π/2.

Решение. а) Функция — произведение, поэтому применяем правило (uv)′ = u′v + uv′, а для множителя e^(−2x) берём производную сложной функции [1]:

$$y'=2x\,e^{-2x}+x^2\cdot(-2)\,e^{-2x}=2x\,(1-x)\,e^{-2x}.$$

б) Внешняя функция — арктангенс, внутренняя — квадратный корень:

$$y'=\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}.$$

В точке x = 4 знаменатель равен 2 · 2 · 5 = 20, так что y′(4) = 1/20 = 0,05.

в) Для параметрически заданной кривой производная равна отношению производных по параметру. Найдём их: $x'_t = 1-\cos t$, $y'_t = \sin t$. Формулы двойного угла $\sin t = 2\sin(t/2)\cos(t/2)$ и $1-\cos t = 2\sin^2(t/2)$ упрощают ответ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

При t = π/2 точка касания имеет координаты $x_0 = \pi/2 - 1 \approx 0{,}571$ и $y_0 = 1 - \cos(\pi/2) = 1$, угловой коэффициент k = ctg(π/4) = 1. Касательная проходит через $(x_0; y_0)$ с наклоном 45°:

$$y - 1 = 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right) \quad \Longrightarrow \quad y = x + 2 - \frac{\pi}{2} \approx x + 0{,}429.$$

Для проверки пунктов а) и б) производные сравнивались с разностным отношением (f(x + h) − f(x − h))/2h при h = 10^{-6}: в точке x = 0,3 обе величины в пункте а) равны 0,230501, в точке x = 4 в пункте б) получено 0,0500000.

Ответ: а) y′ = 2x(1 − x)e^(−2x); б) y′ = 1/(2√x(1 + x)), y′(4) = 0,05; в) dy/dx = ctg(t/2), касательная y = x + 2 − π/2.

Задача 3. Исследование функции на экстремум

Условие. Для функции f(x) = $2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ найти промежутки монотонности, точки экстремума и перегиба, а также наибольшее и наименьшее значения на отрезке [−2; 3].

Решение. Функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой. Первая производная раскладывается на множители:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6\,(x - 2)(x + 1).$$

Критические точки: x = −1 и x = 2. Знак производной определяем методом интервалов. На (−∞; −1) f′ > 0 и функция растёт, на (−1; 2) f′ < 0 и функция убывает, на (2; +∞) снова f′ > 0. Значит, x = −1 — точка максимума, x = 2 — точка минимума [1]:

$$f_{max} = f(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = 12, \qquad f_{min} = f(2) = -15.$$

Вторая производная f″(x) = 12x − 6 обращается в нуль при x = 1/2 и меняет знак с минуса на плюс. Слева от этой точки график выпуклый вверх, справа выпуклый вниз, а точка (0,5; −1,5) является точкой перегиба. Значение f(0,5) = 0,25 − 0,75 − 6 + 5 = −1,5.

Для наибольшего и наименьшего значений на отрезке сравниваем значения функции на концах и в критических точках: f(−2) = 1, f(−1) = 12, f(2) = −15, f(3) = −4. Наибольшее из этих чисел — 12, наименьшее — −15. Оба достигаются внутри отрезка. График на рисунке 1 подтверждает расчёт.

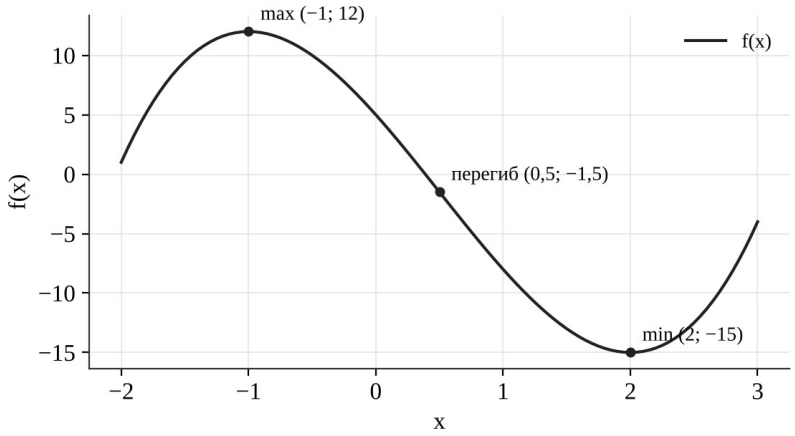


Рисунок 1 – График функции f(x) = 2x³ − 3x² − 12x + 5 на отрезке [−2; 3]

Ответ: f возрастает на (−∞; −1) и (2; +∞), убывает на (−1; 2); максимум f(−1) = 12, минимум f(2) = −15, перегиб в точке (0,5; −1,5). На отрезке [−2; 3] наибольшее значение 12, наименьшее −15.

Задача 4. Неопределённые интегралы

Условие. Найти интегралы: а) ∫ x ln x dx; б) ∫ (2x + 3)/(x² − x − 2) dx; в) ∫ cos x/(1 + sin² x) dx.

Решение. а) Подынтегральное выражение содержит произведение степенной функции и логарифма, поэтому интегрируем по частям. Логарифм удобно взять за u, потому что его производная проще самой функции: u = ln x, dv = x dx, откуда du = dx/x, v = x²/2 [3, 4]:

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Проверка: (x²/2 · ln x − x²/4)′ = x ln x + x/2 − x/2 = x ln x.

б) Знаменатель имеет корни 2 и −1, то есть x² − x − 2 = (x − 2)(x + 1). Раскладываем дробь на простейшие:

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}.$$

После приведения к общему знаменателю приравниваем числители: 2x + 3 = A(x + 1) + B(x − 2). Подставляя x = 2, получаем 7 = 3A, A = 7/3; при x =

−1 имеем 1 = −3B, B = −1/3. Сверка в точке x = 5: левая часть 13/18, правая 7/9 − 1/18 = 13/18. Интеграл от каждой простейшей дроби даёт логарифм:

$$\int \frac{2x+3}{x^2-x-2}\,dx = \frac{7}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C.$$

в) Числитель cos x dx — дифференциал функции sin x, стоящей в знаменателе. Замена t = sin x, dt = cos x dx сводит интеграл к табличному:

$$\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(\sin x) + C.$$

Ответ: а) (x²/2)·ln x − x²/4 + C; б) (7/3)·ln|x − 2| − (1/3)·ln|x + 1| + C; в) arctg(sin x) + C.

Задача 5. Площадь плоской фигуры

Условие. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой y = x² и прямой y = 2x + 3. Сделать чертёж.

Решение. Абсциссы точек пересечения находим из уравнения x² = 2x + 3, то есть x² − 2x − 3 = 0. Его корни $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$, точки пересечения (−1; 1) и (3; 9). Между ними прямая лежит выше параболы: при x = 0 прямая даёт 3, парабола 0. Площадь равна определённому интегралу от разности верхней и нижней функций [3; 5]:

$$S = \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)\,dx = \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}.$$

Подставим пределы. Первообразная в точке 3 равна 9 + 9 − 9 = 9, в точке −1 равна 1 − 3 + 1/3 = −5/3:

$$S = 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{32}{3} \approx 10{,}67.$$

Ответ легко проверить формулой Архимеда для параболического сегмента: если разность функций равна $-(x - x_1)(x - x_2)$, то площадь равна $(x_2 - x_1)^3/6 = 4^3/6 = 32/3$. Метод трапеций на 200 000 отрезках даёт 10,6667.

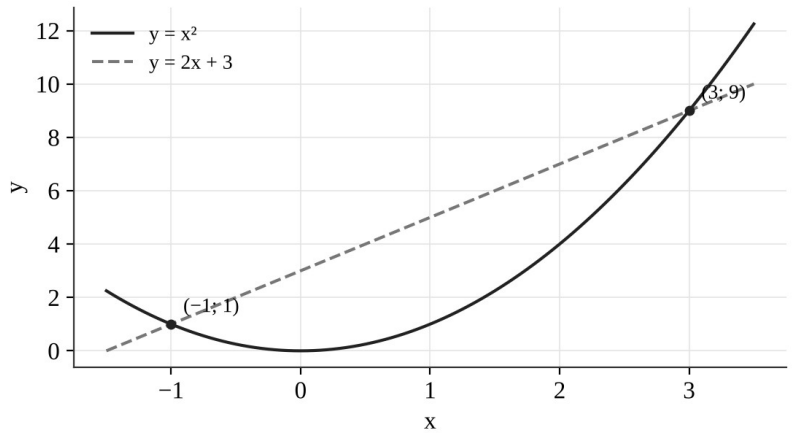


Рисунок 2 – Фигура между параболой y = x² и прямой y = 2x + 3

Ответ: S = 32/3 ≈ 10,67 квадратной единицы.

Задача 6. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка

Условие. Решить задачу Коши: y″ − 5y′ + 6y = 6x + 1, y(0) = 1, y′(0) = 4.

Решение. Общее решение неоднородного уравнения складывается из общего решения однородного уравнения и одного частного решения неоднородного [6, 7]. Характеристическое уравнение r² − 5r + 6 = 0 имеет различные действительные корни $r_1 = 2$ и $r_2 = 3$, поэтому

$$y_{\text{oo}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Правая часть — многочлен первой степени, а число 0 не является корнем характеристического уравнения. Частное решение ищем в виде y* = Ax + B. Тогда (y*)′ = A, (y*)″ = 0, и после подстановки в уравнение получаем −5A + 6Ax + 6B = 6x + 1. Коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа должны совпасть:

$$6Ax + (6B - 5A) = 6x + 1 \quad \Rightarrow \quad A = 1, \;\; B = 1.$$

Общее решение: y = C_1e^(2x) + C_2e^(3x) + x + 1. Постоянные находим из начальных условий. Из y(0) = 1 следует $C_1 + C_2 + 1 = 1$, то есть $C_1 + C_2 = 0$. Производная y′ = 2C_1e^(2x) + 3C_2e^(3x) + 1, и условие y′(0) = 4 даёт $2C_1 + 3C_2 = 3$. Подставив $C_1 = -C_2$, получаем $C_2 = 3$ и $C_1 = -3$:

$$y = 3e^{3x} - 3e^{2x} + x + 1.$$

Проверка. При x = 0 функция равна 3 − 3 + 0 + 1 = 1, производная 9 − 6 + 1 = 4. Подстановка в уравнение: y″ = 27e^(3x) − 12e^(2x), −5y′ = −45e^(3x) + 30e^(2x) − 5, 6y = 18e^(3x) − 18e^(2x) + 6x + 6. Экспоненты взаимно уничтожаются, остаётся 6x + 1, как и требуется.

Ответ: y = 3e^(3x) − 3e^(2x) + x + 1.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Аксенов, А. П. Математический анализ : учебник и практикум для вузов : в 4 ч. Часть 1 / А. П. Аксенов. – Москва : Юрайт, 2024. – 282 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-03510-0.

2. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. – Москва : АСТ : Астрель, 2007. – 558 с. : ил. – ISBN 5-17-010062-0.

3. Аксенов, А. П. Математический анализ : учебник и практикум для вузов : в 4 ч. Часть 2 / А. П. Аксенов. – Москва : Юрайт, 2024. – 344 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-03512-4.

4. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва : Наука, 1985. – 416 с.

5. Сборник задач по высшей математике для экономистов : учебное пособие / под ред. В. И. Ермакова. – 2-е изд., испр. – Москва : ИНФРА-М, 2007. – 573, [1] с. – ISBN 5-16-002781-5.

6. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учебное пособие для втузов : в 2 т. Т. 2 / Н. С. Пискунов. – Москва : Интеграл-Пресс, 2008.

7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : в 2 ч. Ч. 2 / Д. Т. Письменный. – Москва : Айрис-пресс, 2008.