МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
[Полное название вуза]

Экономический факультет
Кафедра математических методов в экономике

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика»

на тему: «Случайные события, случайные величины и интервальная оценка среднего»

Домашняя контрольная работа, вариант 3

Направление подготовки 38.03.01 Экономика

Выполнил(а): студент гр. ____

_____ / И. О. Фамилия

Проверил(а): _____

_____ / И. О. Фамилия

[Город] 2026

Пример работы, выполненной в Универ AI · univerai.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Задача 1. Классическое определение вероятности.....3
Задача 2. Формула полной вероятности и формула Байеса.....3
Задача 3. Повторные независимые испытания.....4
Задача 4. Дискретная случайная величина.....5
Задача 5. Нормальный закон распределения.....6
Задача 6. Точечная и интервальная оценка среднего.....7
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....8

Задача 1. Классическое определение вероятности

Условие. В партии из 20 изделий 5 бракованных. Контролёр наугад берёт 3 изделия. Найти вероятность того, что среди них: а) ровно два бракованных; б) хотя бы одно бракованное.

Решение. Опыт — выбор 3 изделий из 20 без возвращения. Порядок не важен. Все такие выборки равновозможны, и их число равно числу сочетаний [1]:

$$n = C_{20}^{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140.$$

а) Событию A = {ровно два бракованных} благоприятствуют выборки, в которых 2 изделия взяты из 5 бракованных, а одно из 15 годных. По правилу произведения $m = C_5^2 \cdot C_{15}^1 = 10 \cdot 15 = 150$, и

$$P(A) = \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{150}{1140} = \frac{5}{38} \approx 0{,}132.$$

б) Считать напрямую случаи «одно», «два» и «три» бракованных долго. Проще перейти к противоположному событию: все три изделия годные. Таких выборок $C_{15}^3 = 455$, поэтому

$$P(B) = 1 - \frac{C_{15}^3}{C_{20}^3} = 1 - \frac{455}{1140} \approx 1 - 0{,}399 = 0{,}601.$$

Ответ: а) 5/38 ≈ 0,132; б) ≈ 0,601.

Задача 2. Формула полной вероятности и формула Байеса

Условие. На склад поступают одинаковые детали с трёх заводов: 50 % с первого, 30 % со второго и 20 % с третьего. Доля брака у заводов составляет соответственно 2 %, 3 % и 5 %. Наугад взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена на третьем заводе?

Решение. Введём гипотезы H_1, H_2, H_3 — деталь изготовлена соответственно первым, вторым или третьим заводом. Их вероятности $P(H_1) = 0{,}5$, $P(H_2) = 0{,}3$, $P(H_3) = 0{,}2$ в сумме дают единицу. Событие A — деталь бракованная, условные вероятности $P(A|H_1) = 0{,}02$, $P(A|H_2) = 0{,}03$, $P(A|H_3) = 0{,}05$.

Сначала по формуле полной вероятности найдём, как часто на складе встречается брак вообще [2]:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)\,P(A|H_i) = 0{,}010 + 0{,}009 + 0{,}010 = 0{,}029.$$

После того как событие A произошло, вероятности гипотез пересчитываются по формуле Байеса:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)\,P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{0{,}029} \approx 0{,}345.$$

Для сравнения: $P(H_1|A) = 0{,}010/0{,}029 \approx 0{,}345$ и $P(H_2|A) = 0{,}009/0{,}029 \approx 0{,}310$, сумма трёх апостериорных вероятностей равна 1. Третий завод даёт лишь пятую часть поставок, но среди бракованных деталей его доля выросла до 34,5 % и сравнялась с долей первого завода.

Ответ: $P(A) = 0{,}029$; $P(H_3|A) = 10/29 \approx 0{,}345$.

Задача 3. Повторные независимые испытания

Условие. Вероятность того, что покупатель, зашедший в салон связи, оформит покупку, равна $p = 0{,}7$ (условные данные для примера). В течение часа салон посетили 10 покупателей, решения они принимают независимо. Найти вероятность того, что покупку оформят: а) ровно 8 человек; б) не менее 8 человек. Найти наивероятнейшее число покупок.

Решение. Здесь подходит схема Бернулли. Испытания независимы, в каждом из них возможны два исхода, а вероятность успеха от покупателя к покупателю не меняется. Вероятность ровно k успехов из n даёт формула Бернулли [1]:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad q = 1 - p = 0{,}3.$$

а) При n = 10 и k = 8:

$$P_{10}(8) = C_{10}^8 \cdot 0{,}7^8 \cdot 0{,}3^2 = 45 \cdot 0{,}057648 \cdot 0{,}09 \approx 0{,}2335.$$

б) «Не менее восьми» означает 8, 9 или 10 покупок. Аналогично находим $P_{10}(9) = 10 \cdot 0{,}7^9 \cdot 0{,}3 \approx 0{,}1211$ и $P_{10}(10) = 0{,}7^{10} \approx 0{,}0282$. Эти события несовместны, их вероятности складываются:

$$P_{10}(k \geq 8) = 0{,}2335 + 0{,}1211 + 0{,}0282 = 0{,}3828.$$

Наивероятнейшее число k_0 удовлетворяет двойному неравенству $np - q \leq k_0 \leq np + p$ [3], то есть $6{,}7 \leq k_0 \leq 7{,}7$. Целое число в этом промежутке одно: $k_0 = 7$, и $P_{10}(7) \approx 0{,}2668$ действительно больше $P_{10}(8)$.

Ответ: а) 0,2335; б) 0,3828; наивероятнейшее число покупок $k_0 = 7$.

Задача 4. Дискретная случайная величина

Условие. Устройство состоит из трёх блоков, которые выходят из строя за смену независимо друг от друга с вероятностями 0,1, 0,2 и 0,3. Случайная величина X — число отказавших за смену блоков. Составить ряд распределения X, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и вероятность $P(X \leq 1)$.

Решение. X может принимать значения 0, 1, 2 и 3. Вероятности безотказной работы блоков $q_1 = 0{,}9$, $q_2 = 0{,}8$, $q_3 = 0{,}7$. Ни один блок не отказал с вероятностью $P(X = 0) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$, все три отказали с вероятностью $P(X = 3) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006$. Ровно один отказ возможен тремя несовместными способами:

$$P(X = 1) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0{,}398.$$

Слагаемые равны 0,056; 0,126 и 0,216. Аналогично $P(X = 2) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 0{,}014 + 0{,}024 + 0{,}054 = 0{,}092$. Сумма всех вероятностей $0{,}504 + 0{,}398 + 0{,}092 + 0{,}006 = 1$, ряд составлен верно.

Таблица 1 – Ряд распределения числа отказавших блоков

x_i	0	1	2	3
p_i	0,504	0,398	0,092	0,006

Математическое ожидание и дисперсия по определению [4; 5]:

$$M(X) = \sum x_i p_i = 0{,}398 + 0{,}184 + 0{,}018 = 0{,}6,$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 0{,}46, \quad \sigma(X) \approx 0{,}678.$$

Здесь M(X²) = 0,398 + 4 · 0,092 + 9 · 0,006 = 0,82, а M²(X) = 0,36, поэтому D(X) = 0,82 − 0,36 = 0,46 и σ(X) = √0,46 ≈ 0,678. Есть и короткая проверка. X — сумма трёх независимых индикаторов отказа, поэтому M(X) = 0,1 + 0,2 + 0,3 = 0,6, а D(X) = 0,1 · 0,9 + 0,2 · 0,8 + 0,3 · 0,7 = 0,46. Наконец, P(X ≤ 1) = 0,504 + 0,398 = 0,902.

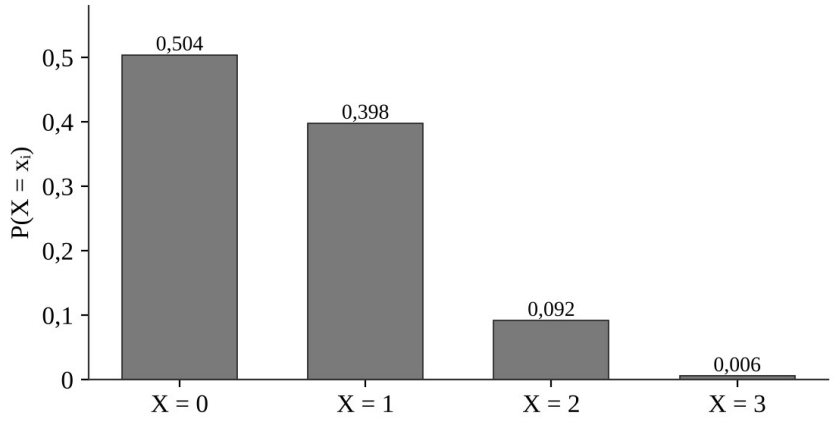


Рисунок 1 – Ряд распределения числа отказавших блоков X

Ответ: ряд распределения — в таблице 1; M(X) = 0,6; D(X) = 0,46; σ(X) ≈ 0,678; P(X ≤ 1) = 0,902.

Задача 5. Нормальный закон распределения

Условие. Диаметр вала, изготовленного на станке, — нормально распределённая случайная величина с математическим ожиданием a = 50 мм и средним квадратическим отклонением σ = 0,2 мм. Деталь годна, если её диаметр лежит в пределах от 49,7 до 50,3 мм. Найти долю годных деталей и указать, в каком симметричном относительно a интервале практически наверняка окажется диаметр.

Решение. Вероятность попадания нормальной величины в интервал выражается через функцию Лапласа Φ(x), значения которой берутся из таблицы [6]:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Границы допуска отстоят от центра на 0,3 мм, то есть на 1,5σ:

$$P(49{,}7 < X < 50{,}3) = 2\,\Phi(1{,}5) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664.$$

Годных деталей около 86,6 %. Брак — 13,4 %, и это много. Половина брака приходится на слишком толстые валы, половина на слишком тонкие, поскольку настройка станка совпадает с серединой поля допуска.

По правилу трёх сигм с вероятностью 2Φ(3) = 0,9973 диаметр отклонится от 50 мм не более чем на 3σ = 0,6 мм, то есть окажется в интервале от 49,4 до 50,6 мм. Если бы требовалась доля годных 95 %, допуск пришлось бы расширить до ±1,96σ = ±0,392 мм или уменьшить σ станка до 0,3/1,96 ≈ 0,153 мм.

Ответ: доля годных деталей 0,8664 (около 86,6 %); практически все диаметры лежат в интервале (49,4; 50,6) мм.

Задача 6. Точечная и интервальная оценка среднего

Условие. Хронометраж обслуживания 12 клиентов в отделении банка дал следующие значения времени, мин (условные данные для примера): 4,2; 5,1; 3,8; 4,6; 5,4; 4,9; 4,1; 5,0; 4,4; 4,7; 5,3; 4,5. Считая время обслуживания нормально распределённым, найти выборочное среднее, исправленную дисперсию и построить доверительный интервал для среднего времени с надёжностью γ = 0,95.

Решение. Объём выборки n = 12, сумма наблюдений 56,0 мин. Выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{56{,}0}{12} \approx 4{,}667 \text{ мин}.$$

Сумма квадратов отклонений от среднего оказалась равна 2,6867. Генеральная дисперсия неизвестна, поэтому берём исправленную выборочную дисперсию с делителем n − 1 [4]:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{2{,}6867}{11} = 0{,}2442, \qquad s = 0{,}494 \text{ мин}.$$

При неизвестной σ и малой выборке интервал строится по распределению Стьюдента с k = n − 1 = 11 степенями свободы [7]. Табличное значение $t_{0{,}95;11} = 2{,}201$ [6]. Точность оценки и сам интервал:

$$\delta = t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} = 2{,}201 \cdot \frac{0{,}494}{\sqrt{12}} = 0{,}314, \qquad 4{,}353 < a < 4{,}981.$$

С надёжностью 0,95 среднее время обслуживания лежит между 4,35 и 4,98 мин. Коэффициент вариации $s/\bar{x}$ = 10,6 % показывает, что разброс времени умеренный. Если бы σ = 0,494 была известна заранее, вместо 2,201 подошёл бы квантиль нормального закона 1,96, и интервал сузился бы до ±0,280 мин.

Ответ: $\bar{x} \approx 4{,}67$ мин; $s^2 \approx 0{,}244$; доверительный интервал (4,35; 4,98) мин при γ = 0,95.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. – 9-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2003. – 478, [1] с. – ISBN 5-06-004214-6.

2. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей : учебник для студентов вузов / Е. С. Вентцель. – 8-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2002. – 575 с. – ISBN 5-06-003650-2.

3. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. – 4-е изд., испр. – Москва : Айрис-пресс, 2008. – 287 с. : ил., табл. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-8112-3340-3.

4. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н. Ш. Кремер. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : ЮНИТИ, 2012. – 550, [1] с. – (Золотой фонд российских учебников). – ISBN 978-5-238-01270-4.

5. ГОСТ Р 50779.10-2000 (ИСО 3534.1-93). Статистические методы. Вероятность и основы статистики. Термины и определения : государственный стандарт Российской Федерации : принят и введён в действие постановлением Госстандарта России от 29.12.2000 № 429-ст : дата введения 2001-07-01. – URL: https://meganorm.ru/Data1/9/9189/index.htm (дата обращения: 22.10.2026). – Текст : электронный.

6. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. – 6-е изд., доп. – Москва : Высшая школа, 2002. – 403, [1] с. – ISBN 5-06-004212-X.

7. ГОСТ Р 50779.22-2005 (ИСО 2602:1980). Статистические методы. Статистическое представление данных. Точечная оценка и доверительный интервал для среднего : национальный стандарт Российской Федерации : утверждён и введён в действие приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 31.05.2005 № 112-ст : дата введения 2005-07-01. – URL: https://meganorm.ru/Data2/1/4293853/4293853362.htm (дата обращения: 22.10.2026). – Текст : электронный.