МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
[Полное название вуза]

Инженерный факультет
Кафедра общей физики

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

по дисциплине «Физика»

на тему: «Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника»

Выполнил(а): студент гр. ____
_____ / И. О. Фамилия

Проверил(а): _____
_____ / И. О. Фамилия

[Город] 2026

Пример работы, выполненной в Универ AI · univerai.ru

1. Цель работы

Определить ускорение свободного падения g по периоду колебаний математического маятника двумя способами: многократным измерением периода при одной длине нити и по наклону графика зависимости квадрата периода от длины. Оценить случайную и приборную погрешности, сравнить результаты между собой и со стандартным значением g, принятым в метрологии, и выяснить, какая из измеряемых величин сильнее всего ограничивает точность опыта.

Все числа в таблицах этого отчёта — **условные данные для примера**. Они подобраны так, как могли бы выйти на обычной учебной установке, но реальный опыт не проводился. Обработка выполнена полностью, поэтому отчёт показывает порядок расчётов и оформления.

2. Приборы и принадлежности

Для опыта использовали штатив с муфтой и зажимом, нерастяжимую капроновую нить, стальной шарик диаметром около 22 мм с ушком для подвеса, рулетку с ценой деления 1 мм, штангенциркуль с ценой деления 0,1 мм, электронный секундомер с дискретностью отсчёта 0,01 с и транспортир для контроля начального угла.

Длину маятника l считали от точки подвеса до центра шарика: к длине нити, измеренной рулеткой, добавляли половину диаметра шарика. Диаметр по штангенциркулю составил 22,0 мм, поэтому поправка равна 11 мм. Погрешность длины $\Delta l = 2$ мм складывается из цены деления рулетки и неточности, с которой глаз находит точку перегиба нити в зажиме.

3. Краткая теория

Математическим маятником называют материальную точку, подвешенную на невесомой нерастяжимой нити. Реальный шарик на длинной нити близок к этой модели, если размер шарика мал по сравнению с длиной, а масса нити ничтожна по сравнению с массой шарика. При

отклонении нити на угол φ от вертикали на шарик действует возвращающая составляющая силы тяжести mg·sin φ, и угловое ускорение равно −(g/l)·sin φ [4; 5].

При малых углах sin φ ≈ φ, и уравнение движения становится уравнением гармонических колебаний с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{(g/l)}$. Отсюда период:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{1}$$

где T — период колебаний, с.

Из формулы (1) получаем расчётную формулу для ускорения свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}, \qquad T = \frac{t}{N}, \tag{2}$$

где t — время N полных колебаний, с; N — число колебаний.

Формула (1) верна лишь в пределе малых амплитуд. Для конечной амплитуды φ_0 период немного больше [5]:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right). \tag{3}$$

где φ_0 — угловая амплитуда, рад.

При $\varphi_0 = 5° = 0{,}087$ рад поправка составляет $0{,}087^2/16 \approx 0{,}05$ %. Это в семь раз меньше относительной погрешности, которую мы получим ниже, поэтому в опыте амплитуду ограничивали 5° и поправку не вводили.

Второй способ основан на том, что по формуле (1) квадрат периода прямо пропорционален длине: $T^2 = k \cdot l$, где $k = 4\pi^2/g$. Если построить точки $(l; T^2)$ и провести через них прямую методом наименьших квадратов, ускорение находят по угловому коэффициенту:

$$g = \frac{4\pi^2}{k}. \tag{4}$$

где k — угловой коэффициент прямой $T^2 = k \cdot l + b$, $с^2/м$; b — свободный член, $с^2$.

Этот способ удобен тем, что систематическая ошибка в отсчёте длины (например, неверно учтённый радиус шарика) сдвигает прямую вдоль оси, но не меняет её наклона. Она уходит в свободный член b, который в идеальном опыте равен нулю.

Результат прямых многократных измерений обрабатывали по ГОСТ Р 8.736-2011 [2]. Среднее арифметическое и среднее квадратическое отклонение среднего:

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \qquad S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}{n(n-1)}}. \tag{5}$$

где n — число измерений; t_i — результат i-го измерения.

Доверительная граница случайной погрешности равна $\Delta t_{сл} = t(P, n) \cdot S$, где t(P, n) — коэффициент Стьюдента; для доверительной вероятности P = 0,95 и n = 5 он равен 2,78. Случайную и приборную составляющие складывали квадратично, как некоррелированные составляющие суммарной стандартной неопределенности [1]. Погрешность косвенно измеренного g нашли по правилу для произведения степеней [3; 6]:

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\,\Delta T}{T}\right)^2}. \tag{6}$$

где Δl, ΔT — абсолютные погрешности длины и периода.

Множитель 2 при относительной погрешности периода появляется потому, что T входит в формулу (2) во второй степени. Отсюда практический вывод: время нужно измерять заметно аккуратнее, чем длину.

4. Ход работы и результаты измерений

Шарик подвесили на нить, закреплённую в зажиме штатива, и установили длину маятника $l = 0{,}800$ м: длина нити 0,789 м плюс радиус шарика 0,011 м. Затем отклонили шарик примерно на 5° по транспортиру и отпустили без толчка. Первые два-три колебания пропускали. За это время движение успокаивается и идёт в одной плоскости, без заметного «эллипса».

В серии 1 в момент прохождения шариком крайнего положения запускали секундомер и отсчитывали $N = 30$ полных колебаний, всего пять раз подряд при одной и той же длине. В серии 2 длину нити меняли от 0,300 до 1,000 м с шагом 0,100 м и для каждой из восьми длин один раз измеряли время $N = 20$ колебаний. Результаты записали в таблицы 1 и 2; в таблице 1 сразу приведены отклонения от среднего и их квадраты, которые понадобятся для оценки случайной погрешности.

Таблица 1 – Время 30 колебаний при $l = 0{,}800$ м (серия 1)

№ опыта	t, с	$t_i - \bar{t}$, с	$(t_i - \bar{t})^2$, с²	g_i, м/с²
1	53,81	0,028	0,00078	9,817
2	53,85	0,068	0,00462	9,802
3	53,78	−0,002	0,000004	9,828
4	53,71	−0,072	0,00518	9,853
5	53,76	−0,022	0,00048	9,835
Среднее	53,782	—	$\Sigma = 0{,}01108$	9,827

Примечание – условные данные для примера; g_i рассчитано по формуле (2) для каждого опыта отдельно.

Почему крайняя точка? Секундомер удобнее запускать именно там, а не в положении равновесия. В крайней точке скорость шарика равна нулю, и момент легко поймать глазом. Счёт колебаний начинали с нуля. Если в момент запуска сказать «раз», к концу счёта будет отсчитано на одно колебание меньше, чем названо. Ошибка частая, и она занижает период на $1/N$: при 30 колебаниях на 3,3 %, при 20 — на 5 %, а g тогда выходит завышенным вдвое сильнее.

5. Обработка результатов

5.1 Серия 1: многократное измерение при одной длине

Среднее время 30 колебаний $\bar{t}$ = (53,81 + 53,85 + 53,78 + 53,71 + 53,76) / 5 = 268,91 / 5 = 53,782 с. Сумма квадратов отклонений из таблицы 1 равна 0,01108 с², откуда по формуле (5):

$S = \sqrt{(0{,}01108 / (5 \cdot 4))} = \sqrt{0{,}000554} = 0{,}0235$ с.

Случайная погрешность при P = 0,95: $\Delta t_{сл} = 2{,}78 \cdot 0{,}0235 = 0{,}065$ с. Приборная погрешность электронного секундомера равна дискретности отсчёта, 0,01 с. Полная погрешность $\Delta t = \sqrt{(0{,}065^2 + 0{,}01^2)} = 0{,}066$ с. Приборная часть почти ничего не добавила. Разброс задаёт реакция экспериментатора, а не прибор.

Период T = 53,782 / 30 = 1,7927 с, его погрешность ΔT = 0,066 / 30 = 0,0022 с. Ускорение свободного падения по формуле (2):

$g = 4\pi^2 \cdot 0{,}800 / 1{,}7927^2 = 39{,}478 \cdot 0{,}800 / 3{,}2139 = 9{,}827$ м/с². Результаты отдельных опытов, пересчитанные так же (последний столбец таблицы 1), лежат в диапазоне от 9,802 до 9,853 м/с².

Относительная погрешность по формуле (6): $\Delta l / l$ = 0,002 / 0,800 = 0,0025; $2\Delta T / T = 2 \cdot 0{,}0022 / 1{,}7927 = 0{,}0025$. Обе составляющие почти равны. Точность длины и точность времени в этой серии сбалансированы, и улучшать одну без другой бессмысленно. Итого $\varepsilon = \sqrt{(0{,}0025^2 + 0{,}0025^2)} = 0{,}0035$, или 0,35 %. Абсолютная погрешность $\Delta g = 9{,}827 \cdot 0{,}0035 = 0{,}034$ м/с². После округления погрешности до одной значащей цифры:

$$\mathbf{g_1 = (9{,}83 \pm 0{,}03)\ м/с^2,\ P = 0{,}95,\ \varepsilon = 0{,}35\ \%.}$$

5.2 Серия 2: среднее по точкам и метод наименьших квадратов

Во второй серии длину меняли от опыта к опыту. Время отсчитывали по 20 колебаниям, чтобы самая длинная серия занимала не больше 40 с и амплитуда не успевала заметно затухнуть.

Сначала посчитаем g для каждой длины отдельно (столбец g таблицы 2). Среднее по восьми точкам $\bar{g}$ = 9,816 м/с². Средняя абсолютная

погрешность, то есть среднее арифметическое модулей отклонений, равна (0,071 + 0,002 + 0,075 + 0,024 + 0,028 + 0,025 + 0,015 + 0,005) / 8 = 0,031 м/с², средняя относительная — 0,31 %. Наибольшие отклонения дали короткие нити 0,3 и 0,5 м. Для них период мал, и та же ошибка секундомера составляет большую долю измеряемого времени; при l = 0,300 м относительная погрешность одной точки достигает 1,1 %, тогда как при l = 1,000 м она около 0,5 %.

Таблица 2 – Зависимость периода от длины маятника (серия 2, N = 20)

l, м	t, с	T, с	T², с²	g, м/с²	|g − ḡ|, м/с²	δ, %
0,300	21,89	1,0945	1,1979	9,887	0,071	0,72
0,400	25,37	1,2685	1,6091	9,814	0,002	0,02
0,500	28,47	1,4235	2,0264	9,741	0,075	0,76
0,600	31,03	1,5515	2,4072	9,840	0,024	0,25
0,700	33,51	1,6755	2,8073	9,844	0,028	0,28
0,800	35,92	1,7960	3,2256	9,791	0,025	0,25
0,900	38,08	1,9040	3,6252	9,801	0,015	0,15
1,000	40,12	2,0060	4,0240	9,811	0,005	0,06

Примечание – условные данные для примера; ḡ = 9,816 м/с² – среднее по восьми точкам, δ – относительное отклонение от среднего.

Простое усреднение придаёт всем точкам одинаковый вес. А короткие нити заведомо хуже. Поэтому основной результат второй серии получим по наклону прямой. Метод наименьших квадратов по восьми парам (l; T²) дал:

Угловой коэффициент k = 4,031 с²/м при стандартной ошибке S(k) = 0,0136 с²/м, свободный член b = −0,005 с² при S(b) = 0,009 с², коэффициент детерминации R² = 0,99993.

Свободный член b по модулю меньше своей погрешности: доверительная граница при P = 0,95 и шести степенях свободы равна 2,45 · 0,009 = 0,023 с². Значит, прямая в пределах точности проходит через начало координат, и систематической ошибки в отсчёте длины нет. Ускорение по формуле (4):

g = 39,478 / 4,031 = 9,793 м/с². Доверительная граница наклона Δk = 2,45 · 0,0136 = 0,033 с²/м, откуда Δg = g · Δk / k = 9,793 · 0,033 / 4,031 = 0,08 м/с².

g_2 = (9,79 ± 0,08) м/с², P = 0,95, ε = 0,8 %.

Погрешность у второго способа больше, чем у первого, потому что в серии 2 на каждую длину приходилось всего одно измерение времени, и всё остаточное рассеяние точек вокруг прямой честно попало в оценку S(k). Если провести прямую строго через начало координат (b = 0), наклон получается 4,024 с²/м, а g = 9,810 м/с², что ближе к результату серии 1.

5.3 Сравнение результатов

Таблица 3 – Сводка результатов

Способ	g, м/с²	Δg, м/с²	ε, %	Отличие от g_0, %
Серия 1, l = 0,800 м, n = 5	9,83	0,03	0,35	+0,21
Серия 2, среднее по 8 точкам	9,82	0,04	0,36	+0,10
Серия 2, наклон прямой МНК	9,79	0,08	0,8	−0,14

Примечание – g_0 = 9,80665 м/с² – стандартное (нормальное) ускорение свободного падения [7]; для среднего по точкам Δg = t(0,95; 8) · S($\bar{g}$) = 2,36 · 0,015 = 0,036 м/с². Расчёт выполнен по условным данным для примера.

Все три интервала перекрываются друг с другом и содержат стандартное значение g_0 = 9,80665 м/с², принятое III Генеральной конференцией по мерам и весам в 1901 году [7]. Строго говоря, g_0 — договорная величина. Фактическое ускорение зависит от широты и высоты места: на широте Москвы оно примерно на 0,1 % больше стандартного. Результаты обеих серий отличаются от g_0 меньше, чем на свою погрешность, так что по такому опыту нельзя отличить «местное» g от стандартного. Для этого точность пришлось бы поднять раз в пять.

6. График зависимости T^2 от l

На рисунке 1 точки серии 2 нанесены в координатах (l; T^2). Разброса почти нет. Коэффициент детерминации R^2 = 0,99993. Линейность графика сама по себе подтверждает формулу (1): если бы период зависел от длины иначе, например линейно, точки легли бы на кривую.

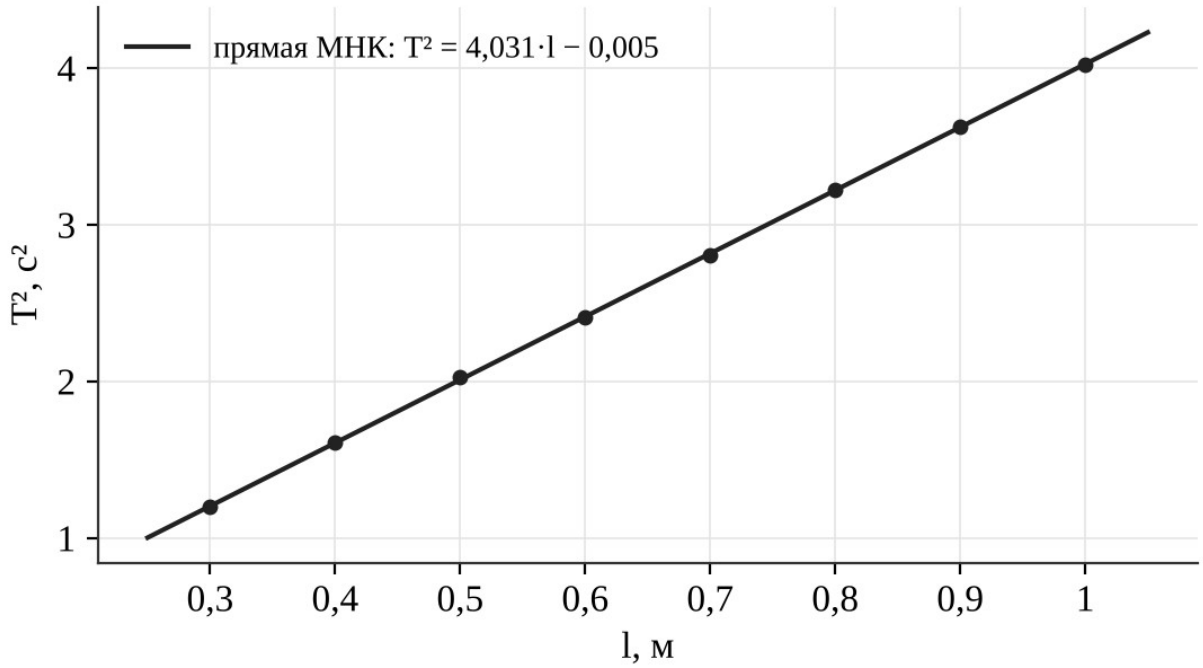


Рисунок 1 – Зависимость квадрата периода колебаний от длины маятника

Точки – условные данные для примера (таблица 2), линия – аппроксимация методом наименьших квадратов.

Теоретический наклон для g_0 равен $4\pi^2/9{,}80665 = 4{,}026$ с²/м. Экспериментальная прямая идёт чуть круче, на 0,1 %, но разница в несколько раз меньше погрешности наклона $\Delta k = 0{,}033$ с²/м.

7. Вывод

В работе ускорение свободного падения определено двумя способами по условным данным, подобранным как для типичной учебной установки. Многократное измерение времени 30 колебаний при $l = 0{,}800$ м дало $g_1 = (9{,}83 \pm 0{,}03)$ м/с² с относительной погрешностью 0,35 %. По наклону графика $T^2(l)$ для восьми длин получено $g_2 = (9{,}79 \pm 0{,}08)$ м/с².

Результаты согласуются между собой и со стандартным значением 9,80665 м/с². Зависимость T^2 от l оказалась линейной, а свободный член прямой не отличается от нуля, так что модель математического маятника для шарика на нити длиной 0,3–1,0 м работает. Поправка на амплитуду 5° (0,05 %) пренебрежимо мала.

Главный источник погрешности очевиден. Это ручной запуск и остановка секундомера. Вклад длины и времени в серии 1 примерно одинаков, поэтому для заметного повышения точности нужно улучшать оба измерения. Время можно было бы измерять оптическим датчиком, а длину — отсчитывать от точки подвеса с помощью отвеса и линейки с зеркальной шкалой. Короткие нити (0,3–0,5 м) дают наименее надёжные значения, и в подобных опытах их лучше измерять повторно.

8. Контрольные вопросы

1. Какой маятник называют математическим и при каких условиях реальный маятник можно считать математическим? Математический маятник — материальная точка на невесомой нерастяжимой нити. Реальный шарик на нити близок к нему, если диаметр шарика много меньше длины нити (у нас 22 мм против 300–1000 мм), масса нити мала, а сопротивление воздуха не успевает заметно погасить колебания за время опыта.

2. Почему период измеряют по времени нескольких десятков колебаний? Ошибка ручного запуска и остановки секундомера, около 0,1–0,2 с, не зависит от числа колебаний. Деление времени на N уменьшает её вклад в период в N раз: при N = 30 ошибка в периоде составляет уже тысячные доли секунды.

3. Зависит ли период математического маятника от массы шарика и амплитуды? От массы не зависит: масса входит и в силу тяжести, и в инертность и сокращается. От амплитуды при малых углах зависит очень слабо; по формуле (3) при 5° период больше на 0,05 %, при 20° — уже примерно на 0,8 %.

4. Что даёт построение графика $T^2(l)$ по сравнению с расчётом g по одной длине? График проверяет саму зависимость $T \propto \sqrt{l}$, использует все измерения сразу и отделяет систематическую ошибку отсчёта длины: она сдвигает прямую, но не меняет её наклон, по которому находят g.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ГОСТ 34100.3–2017/ISO/IEC Guide 98-3:2008. Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения : межгосударственный стандарт : дата введения 2018–09–01. – URL: https://meganorm.ru/Index/65/65118.htm (дата обращения: 22.10.2026). – Текст : электронный.

2. ГОСТ Р 8.736–2011. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения : национальный стандарт Российской Федерации : дата введения 2013–01–01. – URL: https://cn.gostinfo.ru/catalog/Details/?id=4682351 (дата обращения: 22.10.2026). – Текст : электронный.

3. Зайдель, А. Н. Погрешности измерений физических величин / А. Н. Зайдель ; отв. ред. Ж. И. Алферов. – Ленинград : Наука. Ленинградское отделение, 1985. – 112 с.

4. Савельев, И. В. Курс физики : в 3 томах. Том 1. Механика. Молекулярная физика / И. В. Савельев. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2023. – 356 с. – ISBN 978-5-507-47075-4.

5. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – Москва : Физматлит, 2006. – 560 с.

6. Трофимова, Т. И. Краткий курс физики с примерами решения задач : учебное пособие / Т. И. Трофимова. – Москва : КноРус, 2019. – 279 с. – ISBN 978-5-406-05994-4.

7. Declaration 2 of the 3rd CGPM (1901) : [о стандартном ускорении свободного падения 980,665 см/с²] // BIPM : официальный сайт. – URL: https://bipm.org/committees/cg/cgpm/3-1901/resolution-2 (дата обращения: 22.10.2026). – Текст : электронный.